

Übungsblatt 2

Aufgabe P1 *Multiple Choice.*

Bei einer Klausur werden Multiple-Choice Aufgaben gestellt, bei denen von 3 vorgegebenen Antworten genau eine richtig ist. Falls ein Teilnehmer die richtige Antwort auf eine Frage nicht weiß, wird er raten. Ein gewisser Teilnehmer hat 80% der Fragen richtig beantwortet.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat der Teilnehmer eine beliebige Frage tatsächlich gewusst?
- b) Nun hat der Student eine Frage richtig beantwortet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er die Antwort auf die Frage tatsächlich gewusst?

Lösung: erstellt von Meier-Hans 27.10.2015

R: Richtig, G: Gewusst.

Aus dem Text: $\mathbb{P}(R) = \frac{8}{10}$, $\mathbb{P}(R|G) = 1$, $\mathbb{P}(R|G^c) = \frac{1}{3}$ Gesucht: $\mathbb{P}(G)$ und $\mathbb{P}(G|R)$.

Es gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R) &= \mathbb{P}(R \cap G) + \mathbb{P}(R \cap G^c) \\ &= \mathbb{P}(R|G) \cdot \mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(R|G^c) \cdot \mathbb{P}(G^c) \\ &= \mathbb{P}(R|G) \cdot \mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(R|G^c) \cdot (1 - \mathbb{P}(G)).\end{aligned}$$

Umstellen liefert nun

$$\mathbb{P}(G) = \frac{\mathbb{P}(R) - \mathbb{P}(R|G^c)}{\mathbb{P}(R|G) - \mathbb{P}(R|G^c)} = \frac{\frac{8}{10} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{7}{10}$$

Nach Bayes gilt nun:

$$\mathbb{P}(G|R) = \frac{\mathbb{P}(R|G) \cdot \mathbb{P}(G)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{1 \cdot \frac{7}{10}}{\frac{8}{10}} = \frac{7}{8}.$$

Aufgabe P2 *Gefangene.*

Für drei Gefangene A,B,C besteht die gleiche Wahrscheinlichkeit, dass sie freigelassen werden, es wird aber entschieden, dass nur zwei von ihnen freikommen sollen. Der Wärter weiß wer. Gefangener A fragt den Wärter, ob er freigelassen wird. Der Wärter will die Frage nicht beantworten, bietet aber an, den Namen eines anderen Gefangenen zu nennen (rein zufällig, wenn Gefangener B und C frei kommen), der freigelassen wird. Gefangener A lehnt ab, da er folgende Überlegung hat: Wenn er nicht den Wärter fragt, hat er eine Chance von $\frac{2}{3}$ freigelassen zu werden. Teilt der Wärter z.B. mit, dass Gefangener B entlassen wird, so ist die Chance für ihn selbst nur $\frac{1}{2}$ (entweder wird Gefangener A und B oder Gefangener B und C freigelassen). Wo ist der Fehler in der Überlegung von A? Geben Sie einen passenden diskreten Wahrscheinlichkeitsraum an und zeigen Sie durch Rechnung, dass A sich irrt.

Lösung: Gefangener A hat das falsche Wahrscheinlichkeitsmodell gewählt: Es gibt folgende 3 Möglichkeiten welche Personen freigelassen werden: AB, AC und BC. Sei $\Omega := \{(A, B), (A, C), (B, C), (C, B)\}$ die möglichen Situationen Dabei geben beide Einträge an, wer freigelassen wird. Der zweite Eintrag soll die Person sein, deren Name der Wärter nennt. Es ist $\mathbb{P}((A, B)) = \mathbb{P}((A, C)) = \frac{1}{3}$ und $\mathbb{P}((B, C)) = \mathbb{P}((C, B)) = \frac{1}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass Gefangener A freigelassen wird ist:

$$P(\{(A, B), (A, C)\}) = P((A, B)) + P((A, C)) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$\{(A, B), (C, B)\}$ stellt das Ereignis dar, dass der Wärter mitteilt, dass Gefangener B freigelassen wird. Wird mitgeteilt, dass Gefangener B freigelassen wird, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass A freigelassen wird:

$$\begin{aligned} P(\{(A, B), (A, C)\} | \{(A, B), (C, B)\}) &= \frac{P(\{(A, B), (A, C)\} \cap \{(A, B), (C, B)\})}{P(\{(A, B), (C, B)\})} \\ &= \frac{P(\{(A, B)\})}{P(\{(A, B), (C, B)\})} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Der Gefangene A hat in seinem Modell nicht berücksichtigt, dass der Wärter immer einen anderen Namen sagt, als seinen Namen. Nur die Wahrscheinlichkeit, dass der Wärter den Gefangenen B oder C nennt ist jeweils $\frac{1}{2}$.

Aufgabe P3 Unabhängigkeit von Teilmengen.

Es seien A und B Ereignisse mit $A \subset B$. Zeigen Sie: A und B sind genau dann unabhängig, falls $\mathbb{P}(A) = 0$ oder $\mathbb{P}(B) = 1$.

Lösung: erstellt von Meier-Hans 10.09.2014

Es sei $A \subset B$. Dann gelten $A \cap B = A$ und $A \cup B = B$.

„ \Rightarrow “:

Es seien A und B unabhängig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \\ \Rightarrow 0 &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) \\ \Rightarrow \mathbb{P}(A) &= 0 \vee \mathbb{P}(B) = 1 \end{aligned}$$

„ \Leftarrow “:

Möglichkeit (i)

Es gelte $\mathbb{P}(A) = 0$ oder $\mathbb{P}(B) = 1$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(A) \cdot (1 - \mathbb{P}(B)) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B)$$

Also sind A und B unabhängig.

Möglichkeit (ii)

Sei $\mathbb{P}(A) = 0$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) = 0 = 0 \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Sei $\mathbb{P}(B) = 1$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A) \cdot 1 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Also sind A und B unabhängig.

Aufgabe H1 Verkehrsmittel und Geschlecht.

Die Belegschaft einer Firma besteht jeweils zur Hälfte aus Männern und Frauen. Insgesamt kommen 30% der Belegschaft zu Fuß zur Arbeit; 25% kommen mit dem Fahrrad. Der Rest der Belegschaft reist mit dem Auto an. Unter denjenigen, die zu Fuß zur Arbeit kommen sind 60% Frauen. Unter denen, die mit dem Auto zur Arbeit kommen beträgt der Frauenanteil hingegen lediglich 40%.

- Bestimmen Sie den Frauenanteil unter den Mitarbeitern, die mit dem Fahrrad zur Arbeit kommen.
- Welcher Anteil der weiblichen Mitarbeiter kommt mit dem Fahrrad zur Arbeit?
- Welcher Anteil der männlichen Mitarbeiter kommt mit dem Fahrrad zur Arbeit?

Lösung: erstellt von Meier-Hans 27.10.2015

M: Männer, F: Frauen, Fu: zu Fuß, Fa: Fahrrad, A: Auto. (0,5 Punkte)

Aus dem Text gegeben sind: $\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(F) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(Fu) = \frac{30}{100}$, $\mathbb{P}(Fa) = \frac{25}{100}$, $\mathbb{P}(F|Fu) = \frac{60}{100}$, $\mathbb{P}(F|A) = \frac{40}{100}$. Unmittelbar folgt $\mathbb{P}(A) = \frac{45}{100}$. (0,5 Punkte)

Wo mit den Brüchen gerechnet wird werden sie in einer geschickten Form verwendet.

a)

Gesucht ist $\mathbb{P}(F|Fa)$. (0,5 Punkte)

Es gilt (totale WK)

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(F \cap Fu) + \mathbb{P}(F \cap Fa) + \mathbb{P}(F \cap A) = \mathbb{P}(F|Fu) \cdot \mathbb{P}(Fu) + \mathbb{P}(F|Fa) \cdot \mathbb{P}(Fa) + \mathbb{P}(F|A) \cdot \mathbb{P}(A).$$

Umstellen liefert

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F|Fa) &= \frac{\mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(F|Fu) \cdot \mathbb{P}(Fu) - \mathbb{P}(F|A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(Fa)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{10} - \frac{4}{10} \cdot \frac{45}{100}}{\frac{25}{100}} = \frac{14}{25} = 56\%.\end{aligned}$$

Für das finden einer ausrechenbaren Formel für $\mathbb{P}(F|Fa)$ gibt es (1 Punkt).

Sollte nur Bayes für die WK verwendet worden sein, oder eine Form der totalen WK verwendet worden sein, in der die gesuchte WK vorkommt gibt es (0,5 Punkte).

Sind in 2 von 3 Teilaufgaben die Zahlen richtig eingesetzt und ausgerechnet worden gibt es (0,5 Punkte). Sind alle drei Teile richtig (1 Punkt).

b)

Gesucht ist $\mathbb{P}(Fa|F)$. (0,5 Punkte)

Der Satz von Bayes liefert

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Fa|F) &= \frac{\mathbb{P}(F|Fa) \cdot \mathbb{P}(Fa)}{\mathbb{P}(F)} \quad (0,5 \text{ Punkte}) \\ &= \frac{\frac{56}{100} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{25} = 28\%.\end{aligned}$$

c)

Gesucht ist $\mathbb{P}(Fa|M)$. (0,5 Punkte)

Wiederum gilt

$$\mathbb{P}(Fa) = \mathbb{P}(Fa \cap F) + \mathbb{P}(Fa \cap M) = \mathbb{P}(Fa|F) \cdot \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(Fa|M) \cdot \mathbb{P}(M).$$

Umstellen liefert

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Fa|M) &= \frac{\mathbb{P}(Fa) - \mathbb{P}(Fa|F) \cdot \mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(M)} \\ &= \frac{\frac{1}{4} - \frac{7}{25} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{11}{50} = 22\%.\end{aligned}$$

Für das finden einer ausrechenbaren Formel für $\mathbb{P}(Fa|M)$ gibt es (1 Punkt).

Sollte nur Bayes für die WK verwendet worden sein, oder eine Form der totalen WK verwendet worden sein, in der die gesuchte WK vorkommt gibt es (0,5 Punkte).

Aufgabe H2 *Schwarz und Weiß.*

Eine Urne enthält zwei schwarze und zwei weiße Kugeln. Es werden nacheinander drei Kugeln gezogen. Falls eine weiße Kugel gezogen wird, wird diese nicht zurückgelegt. Falls eine schwarze Kugel gezogen wird, wird diese zurückgelegt.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden Kugeln in der Reihenfolge schwarz, weiß, schwarz gezogen ?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden zwei schwarze und eine weiße Kugeln gezogen?
- Sie bekommen die Information, dass die erste und dritte Kugel schwarz war. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war dann die zweite Kugel weiß?

Lösung: Sei $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) | \omega_i \in \{w, s\}\}$ und $\mathcal{A} = P(\Omega)$.

Sei S_i das Ereignis, dass die i -te Kugel schwarz war und W_i das Ereignis, dass die i -te Kugel weiß war.

Dann ist $\mathbb{P}(S_1) = \mathbb{P}(W_1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(S_2|S_1) = \mathbb{P}(W_2|S_1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(S_2|W_1) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(W_2|W_1) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(S_3|S_1 \cap S_2) = \mathbb{P}(W_3|S_1 \cap S_2) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(S_3|W_1 \cap S_2) = \mathbb{P}(S_3|S_1 \cap W_2) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(S_3|W_1 \cap W_2) = 1$, $\mathbb{P}(W_3|W_1 \cap S_2) = \mathbb{P}(W_3|S_1 \cap W_2) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(W_3|W_1 \cap W_2) = 0$

a)

Gesucht ist $\mathbb{P}(S_1 \cap W_2 \cap S_3)$: Es ist nach Vorlesung $\mathbb{P}(S_1 \cap W_2 \cap S_3) = \mathbb{P}(S_1)\mathbb{P}(W_2|S_1)\mathbb{P}(S_3|S_1 \cap W_2) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

b)

Hier ist gesucht $\mathbb{P}((S_1 \cap W_1 \cap S_3) \cup (W_1 \cap S_2 \cap S_3) \cup (S_1 \cap S_2 \cap W_3))$. Analog zu oben ist $\mathbb{P}(W_1 \cap S_2 \cap S_3) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ und $\mathbb{P}(S_1 \cap S_2 \cap W_3) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{8}$. Da die drei Ereignisse disjunkt sind, erhält man: $\mathbb{P}((S_1 \cap W_1 \cap S_3) \cup (W_1 \cap S_2 \cap S_3) \cup (S_1 \cap S_2 \cap W_3)) = \frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{1}{8} = \frac{37}{72}$

c)

Hier ist $\mathbb{P}(W_2|S_1 \cap S_3)$ gesucht. Es gilt: $\mathbb{P}(W_2|S_1 \cap S_3) = \frac{\mathbb{P}(S_1 \cap W_2 \cap S_3)}{\mathbb{P}(S_1 \cap S_3)} = \frac{\mathbb{P}(S_1 \cap W_2 \cap S_3)}{\mathbb{P}(S_1 \cap W_2 \cap S_3) + \mathbb{P}(S_1 \cap S_2 \cap S_3)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4}} = \frac{16}{24} = \frac{4}{7}$

Aufgabe H3 *Unabhängige Ereignisse.*

Seien A, B zwei Ereignisse mit $0 < \mathbb{P}(B) < 1$. Leiten Sie aus den Definitionen her, dass

$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^c)$ genau dann gilt, wenn A, B unabhängig sind.

Lösung: Sei $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^c)$: Es ist $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ und $\mathbb{P}(A|B^c) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B^c)}{\mathbb{P}(B^c)}$ (beachte, dass $\mathbb{P}(B^c) > 0$). [1 Pkt] Weiter gilt $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$ und $\mathbb{P}(B^c) = 1 - \mathbb{P}(B)$. Also hat man $\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^c) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B^c)}{\mathbb{P}(B^c)} = \frac{\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)}{1 - \mathbb{P}(B)}$. [1 Pkt] Umstellen ergibt $\mathbb{P}(A \cap B)(1 - \mathbb{P}(B)) = (\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B))\mathbb{P}(B)$. Damit hat man (wenn man auf beiden Seiten $\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A \cap B)$ addiert): $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. [1 Pkt]

Sei A, B unabhängig. Man beachte, dass dann nach Vorlesung gilt, dass A, B^c auch unabhängig sind. Also gilt $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)}{\mathbb{P}(B^c)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B^c)}{\mathbb{P}(B^c)} = \mathbb{P}(A|B^c)$. [3 Pkt]

Abgabe der Hausübungen (Aufgaben H1 bis H3): Mittwoch, 23. Oktober, 16:00 Uhr

Viel Erfolg! :)